



INSTITUTO GLOBAL DE ALTOS ESTUDIOS EN CIENCIAS SOCIALES
(IGLOBAL)

Teoría de las Posibilidades vs Teoría de las Probabilidades

Trabajo final para optar por el título de:
ESPECIALIDAD EN PENSAMIENTO COMPLEJO, CIENCIAS DE LA
COMPLEJIDAD Y TEORÍA DEL CAOS

Proponente
Yamir Encarnación

Coordinador Académico
Dr. Pedro Sotolongo Codina

16 de Diciembre de 2013
Santo Domingo, República Dominicana

Lista de Símbolos

P	función de probabilidad, 3,6
Ω	espacio muestral, 5
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	σ -álgebra, 5,17
$\cup$	unión de conjuntos, 6
$\min$	mínimo, 11
$\max$	máximo, 11
$\inf$	ínfimo, 11
$\sup$	supremo, 11
$\cap$	intersección de conjuntos, 11
$\mathcal{P}(X)$	conjunto potencia de X, 11
$\subseteq$	relación de inclusión, 11
$\vee$	operación binaria, 11
$\wedge$	operación binaria, 11
$\in$	pertenece a, 13
$\chi(x)$	función característica de un conjunto A, 13
$\mu_A(x)$	función de pertenencia de un conjunto difuso A, 14
$A(x)$	grado de pertenencia a un conjunto difuso, 14
$*$	t-norma, 15
$\sqcup$	t-conorma, 15
$\Rightarrow$	residuo de una t-norma, 15
X	conjunto universo, 17
Bel	medida de creencia, 18
Pl	medida de plausibilidad, 18
m	función de asignación básica de probabilidad, 19
Nec	medida de necesidad, 21
Pos	medida de posibilidad, 21
$\leq_{pos}$	relación de orden 23

“Pero existe una clase de controversia que, por la misma naturaleza del lenguaje y de las ideas humanas, está envuelta en una ambigüedad permanente y no puede nunca —ni a través de salvaguardas ni a través de definiciones— llegar a alcanzar una certeza o precisión razonables. Se trata de las controversias que se refieren a los grados de cualquier cualidad o circunstancia. Los humanos pueden discutir eternamente si Aníbal es un gran hombre o si es un muy gran hombre o superlativamente grande; pueden discutir qué grado de belleza poseía Cleopatra, qué epíteto elogioso se puede conceder a Tito Livio o a Tucídides, todo ello sin llevar la controversia a ninguna conclusión. Los oponentes pueden estar de acuerdo aquí en el sentido que dan a sus palabras y en desacuerdo en los términos que usan, o al revés; con todo nunca serán capaces de definir sus términos, de forma que puedan penetrar el significado de los demás. Eso es así porque los grados de estas cualidades no son como la cantidad o el número, susceptibles de una exacta medición, que pueda servir de patrón en la controversia.”

David Hume

RESUMEN

En el presente trabajo exponemos las diferentes interpretaciones filosóficas de las probabilidades, así como la caracterización matemática de la teoría de las probabilidades propuesta por Kolmogorov. También presentamos los fundamentos matemáticos de la lógica difusa desde la teoría de retículos y desde la teoría de conjuntos para desarrollar la teoría de la evidencia como marco general y comparar dos casos particulares: la teoría de las probabilidades y la teoría de las posibilidades. Aunque éstas tienen un marco común tienen diferencias importantes. La primera es una medida aditiva, la probabilidad; en cambio, la segunda no es aditiva y está basada en dos tipos de medidas: medidas de necesidad y medidas de posibilidad. Las medidas de posibilidad, necesidad y probabilidad son independientes unas de otras, excepto cuando el elemento focal es unitario.

INTRODUCCION

El estudio de las teorías de la probabilidades es un camino apasionante que nos lleva a prácticamente todas las ciencias contemporáneas y a casi todas las actividades del hombre. Desde la predicción del tiempo por el ciudadano común hasta la experimentación científica hacen uso de las probabilidades para realizar pronósticos o evaluar hipótesis.

Podríamos afirmar sin temor a equivocarnos que entender el mundo de hoy sin las probabilidades o la estadística es casi imposible. El uso de la estadística en la física cuántica, medicina, ciencias sociales o la bolsa de valores hacen que casi reverenciamos esta disciplina.

La Modernidad nos enseñó a ver el mundo bajo el Determinismo y la búsqueda de leyes universales. Sin embargo, luego fuimos comprendiendo que la realidad era mucho mas compleja y que la incertidumbre era una característica intrínseca de la Naturaleza y de la vida social del hombre.

A partir de este momento la cuantificación de la incertidumbre jugaría un papel importante en la ciencia, y aunque el ser humano desde las civilizaciones antiguas se había cuestionado en torno al azar, éste estaba asociado a los juegos y era un conocimiento empírico. La teoría de las probabilidades al dedicarse al estudio y cuantificación de la incertidumbre se convierte en una de las áreas más importantes de las matemáticas puras y aplicadas.

Sin embargo, la ciencia siempre trata de extender sus fronteras del conocimiento y la incertidumbre no sólo está presente en el mundo físico o social, sino además se origina por la imprecisión de la información o de los modelos que tengamos. La pregunta que nos hacemos ante esta situación es si la teoría de las probabilidades puede cuantificar este tipo de incertidumbre o si se necesita otro paradigma para esta problemática.

El nacimiento de la lógica difusa permitió el desarrollo del aparato matemático para modelar la vaguedad como un concepto opuesto a la exactitud. Desde esta perspectiva surge la teoría de las posibilidades para cuantificar la incertidumbre como contraparte de la teoría de las probabilidades.

A la luz de lo anterior, consideramos que es necesario comprender las diferentes conceptualizaciones que existen en torno a la teoría de las probabilidades, así como su caracterización matemática y estudiar las similitudes y diferencias con la teoría de las posibilidades.

Para ello pretendemos realizar una indagación bibliográfica que nos permita exponer los presupuestos de ambas teorías, sus fundamentos matemáticos y el ámbito de aplicación.

Índice general

1. Teoría de las Probabilidades	1
1.1. Introducción	1
1.2. Las concepciones filosóficas de la probabilidad	2
1.2.1. La teoría clásica de las probabilidades	3
1.2.2. Teoría frecuencial	4
1.2.3. Teoría logicista	4
1.2.4. Teoría subjetivista	5
1.2.5. Teoría matemática	5
1.2.6. Interpretaciones de la probabilidad	6
1.3. Aplicaciones y limitaciones a la teoría de las probabilidades	7
1.3.1. Aplicaciones de la teoría de las probabilidades	7
1.3.2. Limitaciones de la teoría de las probabilidades	8
2. Lógica Difusa	10
2.1. Fundamentos de la lógica difusa	10
2.1.1. Lógica difusa vista desde la teoría de retículos	11
2.1.2. Lógica difusa vista desde la teoría de conjuntos	13
3. Teoría de la Evidencia	17
3.1. Introducción	17
3.2. Teoría de las Posibilidades	20
3.3. Teoría de las posibilidades versus teoría de las probabilidades	21
Conclusión	25

Capítulo 1

Teoría de las Probabilidades

1.1. Introducción

El cálculo de las probabilidades tiene sus orígenes con el juego de azar para estudiar sucesos aleatorios, caracterizados porque nuestras predicciones pueden fallar ya que aparece la incertidumbre. Los griegos, romanos y egipcios plantearon problemas empíricos respecto al azar con las tabas (juego antiguo), sin embargo no se desarrolló una teoría.

En el siglo XVI es donde aparece el estudio de las probabilidades con Gerolamo Cardano. Este matemático y médico italiano en su obra *Liber de Ludo Aleae* resolvió varios problemas del análisis combinatorio. Otros matemáticos como Kepler y Galileo se refirieron a las probabilidades, pero su aporte no es bastante significativo.

El desarrollo de la teoría de las probabilidades surge verdaderamente en el siglo XVII en el Renacimiento francés. En esta época es donde aparecen las contribuciones más importantes de los científicos franceses en el dominio de las matemáticas puras y aplicadas. Sobresalen los nombres de Laplace, Pascal y Fermat quienes son considerados como los pioneros de las probabilidades.

Entre los personajes que hacen aportaciones a las probabilidades es necesario mencionar a Christian Huygens, quien sistematiza las proposiciones surgidas de los problemas planteados por Pascal y Fermat ya que tuvo correspondencia con éstos. Su libro *Del Calculo en los Juegos*

de Azar fue el primero que se publicó sobre el cálculo de las probabilidades y tuvo una gran influencia sobre otros matemáticos.

Otros personajes destacados fueron Leibniz, quien se percató de la importancia de las probabilidades; James Bernoulli que mantuvo correspondencia con Leibniz y demostró el Teorema de Bernoulli; Abraham de Moivre que realizó importantes aportes y demostró el teorema que lleva su nombre y Thomas Bayes que fue el primero en utilizar la probabilidad en el razonamiento inductivo.

El nombre de Pierre Simon Laplace requiere un apartado especial pues es uno de los personajes más importantes en la historia de las probabilidades y es el primero que crea escuela sobre una de las concepciones para el cálculo de las probabilidades. La principal obra de Laplace *Teoría Analítica de las Probabilidades*, publicada en París en 1812, contiene reflexiones sobre la epistemología de las probabilidades y el método de los mínimos cuadrados. Luego de Laplace, la teoría de las probabilidades no tuvo grandes avances hasta el siglo XIX donde hubo la necesidad de examinarla de manera crítica y formal.

1.2. Las concepciones filosóficas de la probabilidad

Antes de abordar las distintas concepciones filosóficas de la probabilidad, definamos algunos conceptos fundamentales.

Definición 1.2.1 *Un experimento aleatorio es caracterizado por dos propiedades:*

- 1. La repetición del experimento bajo idénticas condiciones generalmente tiene diferentes resultados;*
- 2. Los posibles resultados del experimento son conocidos.*

Definición 1.2.2 *Un posible resultado e de un experimento aleatorio es llamado un suceso elemental.*

Definición 1.2.3 *El conjunto de todos los sucesos elementales es llamado espacio muestral. Un espacio muestral es discreto si es un conjunto finito o un conjunto contable infinito.*

Definición 1.2.4 *Un suceso aleatorio A es un conjunto del espacio muestral.*

1.2.1. La teoría clásica de las probabilidades

La teoría clásica parte de la suposición que existe una simetría entre los distintos resultados posibles de un experimento aleatorio. Esto significa que si los posibles sucesos elementales son $e_1, e_2, \dots, e_n$, entonces la probabilidad $P(e_1) = P(e_2) = \dots P(e_n)$. Dado que todos los sucesos elementales componen el espacio muestral tenemos que:

$$\sum_{i=1}^n P(e_i) = 1 \text{ y } P(e_i) = \frac{1}{n}$$

Para cualquier suceso aleatorio A entonces:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Algunos autores caracterizan la teoría clásica de diferentes formas. Fine, por ejemplo, la caracteriza a través del principio de la razón insuficiente, es decir, la equiprobabilidad de los sucesos sucede por la falta de razón que favorezca a un suceso en vez de otros. Contrario a esto, Keynes considera los sucesos equiprobables a través del principio de la razón suficiente cuando la información que se tiene está equilibrada.

La teoría clásica define la probabilidad de acuerdo a los trabajos de Laplace. Esta definición también puede obtenerse a través de la definición axiomática de la probabilidad propuesta por Kolmogorov. En este sentido, Maurice Boudot señala que: *"La axiomatización del cálculo de probabilidades propuesta por Kolmogorov no es más que una traducción a un lenguaje riguroso de los principios sobre los que Laplace fundaba la teoría clásica de las probabilidades"* [2].

Existen muchos experimentos aleatorios que no cumplen con la condición de simetría, además de ser atacada desde el punto de vista lógico y de sus aplicaciones.

1.2.2. Teoría frecuencial

Las dificultades prácticas de la teoría clásica evidenciaron que era insuficiente la definición de probabilidad que ésta planteaba. El hecho de que muchos experimentos aleatorios no cumplen con la condición de simetría llevó a una definición constructiva de la probabilidad de un suceso como el límite de su frecuencia relativa cuando el número de pruebas tiende al infinito.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (1.1)$$

Esta teoría tiene sus orígenes con John Locke en su obra *Ensayo Sobre el Entendimiento Humano* cuando habla del argumento probable. Su más importante exponente fue Von Mises para quien la probabilidad de un suceso queda determinada de manera empírica al realizar un gran número de pruebas del experimento y examinar la frecuencia relativa. La definición de probabilidad de la teoría frecuentista también es criticada desde el punto de vista matemático.

1.2.3. Teoría logicista

Sabemos que un experimento aleatorio (fenómeno) es intrínsecamente incierto. Bajo las mismas condiciones se obtienen resultados diferentes por lo que la previsión de eventos es incierta, lo que en parte genera incertidumbre. Como manera de medir esta incertidumbre tendríamos a la probabilidad. El modelo probabilístico que surge implica una nueva incertidumbre asociada a la validez de la información y del modelo.

Esta incertidumbre está acotada a un conjunto de resultados posibles. Estos resultados pueden ser ponderados según la evidencia empírica disponible o según el criterio subjetivo de cada individuo. En el primer caso hablamos de la interpretación lógica de la probabilidad y en el segundo caso de interpretación subjetiva. Las teorías logicistas de la probabilidad ofrecen un marco apropiado para modelar esa incertidumbre.

La idea de combinar la lógica y la probabilidad puede parecer contradictoria en un primer momento. La lógica se ocupa de verdades absolutamente ciertas y de inferencias, mientras que la probabilidad estudia fenómenos bajo incertidumbre. Sin embargo, la teoría de la probabilidad

es una extensión de la lógica clásica. La lógica ofrece una perspectiva cualitativa de la inferencia; en cambio, la probabilidad ofrece una perspectiva cuantitativa.

La interpretación logicista de la probabilidad parte de la relación que existe entre dos proposiciones: hipótesis y evidencia. La probabilidad es el grado de creencia racional y objetivo en una hipótesis en la medida en que ésta es avalada por la experiencia o evidencia. Se necesita de un individuo que pondere la fuerza de la evidencia haciéndola equivaler a un grado de probabilidad. Aunque este proceso es arbitrario muchos autores han propuestos su axiomatización.

El iniciador de las teorías logicistas fue John Maynard Keynes quien en su obra *A Treatise on Probability* desarrolló el concepto de probabilidad lógica. Otros autores importantes fueron Rudolf Carnap, Harold Jeffreys y B. Koopman.

1.2.4. Teoría subjetivista

En la teoría subjetivista el concepto de probabilidad no necesita de realizar pruebas de un experimento aleatorio, ni de estabilidad de las frecuencias sino que la probabilidad queda determinada por el grado de creencia de las personas. Esta probabilidad será distinta para personas diferentes porque tendrán distinta información sobre cualquier hipótesis en particular, y por tanto, evaluarán esta información de manera diferente.

Algunos autores como John Maynard Keynes, L.J. Savage y Bruno de Finetti han realizado axiomáticas para la teoría subjetivista. En particular, De Finetti elabora un sistema axiomático puramente cualitativo que cumple con los axiomas de la probabilidad matemática.

1.2.5. Teoría matemática

En 1933 el matemático ruso Kolmogorov axiomatizó las probabilidades estableciendo las condiciones mínimas para que una función P nos permita hallar probabilidades. Esta función estará definida en un espacio medible $\{\Omega, \mathcal{A}\}$, donde Ω es el espacio muestral y $\mathcal{A}$ es un σ -

álgebra, esto es, una familia de sucesos A cerrada bajo la unión, intersección y complemento.

La probabilidad P es una función numérica que tiene como dominio el conjunto $\mathcal{A}$ y como rango el intervalo $[0, 1]$, siendo tal que los valores $P(A) \forall A \in \mathcal{A}$ cumplan los siguientes axiomas:

1. $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) \geq 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Para cualquier sucesión finita de sucesos mutuamente excluyentes, se cumple:

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

La tripleta $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ definen un espacio de probabilidad.

Las definiciones de probabilidad dadas por las teorías clásica, frecuentista y subjetivista no contradicen estos axiomas. Estas definiciones son casos particulares de la teoría axiomática.

1.2.6. Interpretaciones de la probabilidad

La axiomatización dada por Kolmogorov es bastante ortodoxa siendo consistente (no contradictoria) con muchas de las conceptualizaciones de las probabilidades; sin embargo, para otras conceptualizaciones esto no es así. Podríamos decir que existen varias interpretaciones de la probabilidad de acuerdo a la teoría que hallamos elegido.

De manera general existen tres interpretaciones de la probabilidad de acuerdo a la Stanford Encyclopedia of Philosophy [10]:

1. Un concepto quasi-lógico que mide las relaciones entre una evidencia objetiva y una hipótesis. Por ejemplo: *A la luz de importantes informaciones geológicas y sismológicas, es probable que República Dominicana experimente un importante sismo esta década;*
2. El grado de confianza o de creencia de un individuo. Por ejemplo: *No estoy seguro que lloverá, pero es probable;*

3. Un concepto objetivo que se aplica a la realidad, independientemente del sujeto. Por ejemplo: *Un átomo de radio decaerá en 10,000 años.*

1.3. Aplicaciones y limitaciones a la teoría de las probabilidades

1.3.1. Aplicaciones de la teoría de las probabilidades

La teoría de las probabilidades tiene un sin número de aplicaciones en la ciencia. La probabilidad (disciplina teórica) y la estadística (ciencia empírica que se encarga del estudio de la colección, organización, análisis e interpretación de datos) sirven como base para realizar experimentos, estimaciones y mediciones en las distintas áreas del saber científico. Prácticamente todas las actividades del hombre utilizan la estadística: física, medicina, negocios, ingeniería, política, agricultura, computación, etcétera.

El uso de las probabilidades y la estadística ha ganado bastante terreno en el campo social, aplicándose en la economía en el estudio de series de tiempo de variables económicas; en la psicología para la construcción de tests psicológicos y en sociología cuando abordamos problemas de colectividades humanas, la representación y el muestreo son de capital importancia.

Aunque es innegable el uso de las probabilidades y la estadística a las actividades humanas, la Física es la ciencia que más se ha beneficiado de esta disciplina. Como señaló Francis Edgeworth en su discurso pronunciado ante la Royal Statistical Society en 1912: *"La estadística reina y se deleita en el corazón de la física"*. [5]

Muchos fenómenos físicos y propiedades de la materia a nivel microscópico son bien descritos por la mecánica clásica, la mecánica cuántica o el electromagnetismo, mientras que a nivel macroscópico son descritos por la termodinámica. A partir de los principios de la estadística y de la física podemos estudiar la relación entre el nivel micro y macro de los fenómenos físicos, disciplina conocida como física estadística o mecánica estadística.

La física estadística tiene su origen con la teoría cinética de los gases la cual trataba de explicar el comportamiento de los gases a partir de que las moléculas obedecían a leyes de la mecánica clásica. A partir de la teoría cinética de los gases se comprendió el comportamiento de los gases ideales y correcciones a los gases reales; se descubrió la distribución de Maxwell, que es la distribución de velocidades de las partículas de un gas en equilibrio, y se encontró los coeficientes de transporte en un gas.

La teoría cinética alcanzó su punto más alto con los trabajos de Boltzmann quien generalizó la distribución de Maxwell al caso de gases poliatómicos, además de tener en cuenta la presencia de fuerzas externas. A pesar de su fundamentación, algunos científicos criticaron la base molecular de la teoría cinética y algunos aspectos de los trabajos de Boltzmann. Estas críticas, sin embargo, fueron refutadas de manera definitiva con la explicación del movimiento browniano dada por Einstein.

La teoría cinética era de complicada extensión a los sistemas no mecanicistas (por ejemplo, los sistemas magnéticos) y los sistemas cuánticos. Gibbs desarrolló en 1902 su teoría de las colectividades que viene a ser el marco en que se desarrolla la física estadística, estudiando cualquier sistema macroscópico si de manera suficiente y necesaria están definidos sus componentes microscópicos y sus interacciones.

1.3.2. Limitaciones de la teoría de las probabilidades

Muchos sistemas dinámicos de la Física pueden describirse mediante sistemas elementales de ecuaciones y en casos más complejos se requiere el uso de coordenadas generalizadas (velocidades generalizadas, aceleraciones generalizadas), tal es el caso de un sistema mecánico conservativo (sistema hamiltoniano). Estos sistemas son aislados y tienen propiedades ergódicas lo que permite estimar las funciones de fases del sistema. Una función de fase es una función $P(q_1, q_2, \dots, q_n)$, donde $q_1, q_2, \dots, q_n$ son las coordenadas del sistema y P es el punto asociado al estado inicial del sistema, es decir, el punto que representa el estado del sistema. Al conjunto de estados se le llama estado de fase del sistema.

Para muchos sistemas la estimación de funciones de fase puede ser sencilla, aunque para otros surgen dificultades de tipo teórico y práctico debido a la gran cantidad de grado de libertad y componentes del sistema. Sólo en los sistemas aislados podemos determinar la trayectoria de un punto en el espacio de fase debido a que su energía mecánica total será constante y todas las trayectorias posibles estarán sobre una superficie de energía constante dada. [3]

En otras palabras, existen sistemas dinámicos, no adaptativos y evolutivos (no complejos) y sistemas dinámicos complejos adaptativos y evolutivos. Los sistemas no complejos, es decir, los sistemas aislados, están determinados por su estado previo y no reaccionan a variaciones de su entorno lo que posibilita denominar como "leyes universales" a las transiciones entre estados determinadas por el previo.

En cambio, los sistemas complejos no son determinados por su estado previo, sino condicionados por lo que reaccionan a variaciones de su entorno adaptativa y evolutivamente lo que impide establecer "leyes universales" para las transiciones entre estados presentes y futuros.

La teoría de las probabilidades explica bastante bien los sistemas aislados (cerrados), sin embargo existen sistemas abiertos (sistemas que tienen propiedades no ergódicas) que no pueden explicarse a partir de esta teoría. Tales sistemas están siendo abordados por una nueva estrategia de indagación denominada Ciencias de la Complejidad. Asimismo, ha surgido un nuevo enfoque el cual constituye una extensión de la lógica difusa, la teoría de las posibilidades, que nos permite razonar y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre que sirve para estudiar dichos sistemas y que merece nuestra atención.

El padre de la lógica Difusa, Lofti Zadeh, criticó la teoría de las probabilidades desde su fundamento, la lógica aristotélica, señalando que la bivalencia de la estructura conceptual de la teoría de las probabilidades está en conflicto con la realidad donde todo es cuestión de grado. Además indicó la falta de conceptos robustos en la teoría de las probabilidades, los cuales no son bivalentes como por ejemplo la independencia de sucesos [12].

Capítulo 2

Lógica Difusa

2.1. Fundamentos de la lógica difusa

La lógica es el estudio de la validez de un argumento. La lógica clásica o bivalente que fue la desarrollada por Aristóteles reconocía sólo los valores de verdad verdadero o falso para cualquier proposición. En 1920 Jan Lukasiewicz propuso una lógica trivalente para incluir proposiciones que no son verdaderas ni falsas. Luego a inicios de 1930 desarrolló una lógica de infinitos valores y tras ese esfuerzo se han desarrollado las lógicas polivalentes o multivaluadas.

En 1965 Lofti Zadeh desarrolló la teoría de conjuntos difusos y la lógica difusa que es una lógica polivalente que le asigna a una proposición grados de verdad. Zadeh la definió como “un sistema que proporciona una vía natural para tratar los problemas en los que la fuente de imprecisión es la ausencia de criterios claramente definidos de tipos de pertenencia”.

La lógica difusa puede caracterizarse por ser una lógica polivalente especial que aborda el fenómeno de la vaguedad, desarrollando el aparato matemático para su modelización a través de grados de verdad en correspondencia con una escala ordenada. La lógica difusa trata de preservar muchas propiedades de la lógica clásica. [8]

La vaguedad es un concepto opuesto a la exactitud que nace de la forma como vemos el mundo y los fenómenos. La conceptualización de las ideas se realiza por medio de una idealización, sin embargo la realidad desborda cualquier aproximación conceptual que tengamos sobre ella.

Por ejemplo, podemos distinguir los pequeños números de los grandes números, pero no podemos afirmar sin ambigüedad si cada número es pequeño o no. La propiedad “pequeño” es vaga y tiene que definirse por referencia a un contexto.

2.1.1. Lógica difusa vista desde la teoría de retículos

La lógica difusa está sustentada en la teoría de retículos y es isomorfa a la teoría de conjuntos difusos como veremos más adelante. Veamos algunas nociones de ambas teorías.

Definición 2.1.1 *Un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ es un retículo si en cada par de elementos x, y , el subconjunto $\{x, y\} \in X$, tiene un supremo y un ínfimo, denotado respectivamente por $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.*

Algunos ejemplos de retículos son:

1. $(\mathbb{R}, \leq)$. Para cada $x, y \in \mathbb{R}$, el $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$ y $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$
2. Si S es un conjunto y $\mathcal{P}(S)$ el conjunto potencia de S , entonces $\mathcal{P}(S)$ con la relación $\subseteq$, en el cual el supremo de dos subconjuntos A y B de $\mathcal{P}(S)$ es $A \cup B$ y el ínfimo $A \cap B$ es un retículo.

Esta definición de retículo fundamentada en un conjunto parcialmente ordenado, es equivalente a otra de tipo algebraico.

Definición 2.1.2 *Dado un conjunto X y dos operaciones binarias, denotadas respectivamente por $\vee$ y $\wedge$, que cumplen con las siguientes propiedades para cualquier x, y y $z \in X$:*

1. *Idempotencia*

$$x \vee x = x$$

$$x \wedge x = x$$

2. *Conmutatividad*

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

3. Asociatividad

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

4. Absorción

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

Observación: En inglés se utilizan las palabras meet para $\wedge$ y join para $\vee$.

Teorema 2.1.1 *Dada una estructura algebraica $\langle X, \vee, \wedge \rangle$ tales que $\vee$ y $\wedge$ cumplan con las propiedades de conmutatividad, asociatividad, idempotencia y absorción. Entonces la relación $\leq$ en X definida por $x \leq y$ si y solo si $x \vee y = y$ es un orden parcial. Para cada par de elementos $x, y \in X$ existe el supremo y el ínfimo donde el $\sup\{x, y\} = x \vee y$ y el $\inf\{x, y\} = x \wedge y$. Inversamente, en un conjunto parcialmente ordenado $\langle X, \leq \rangle$ en el cual para cada par de elementos existen el supremo y el ínfimo, si definimos las operaciones $x \vee y = \sup\{x, y\}$ y el $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ se obtiene una estructura algebraica que satisface las propiedades de conmutatividad, asociatividad, idempotencia y absorción.*

Este teorema demuestra la equivalencia entre el retículo del conjunto parcialmente ordenado $\langle X, \leq \rangle$ y el retículo del conjunto $\langle X, \vee, \wedge \rangle$.

Definición 2.1.3 *Un retículo está acotado si tiene cota superior y cota inferior.*

Los sistemas lógicos son teorías abstractas. [1] Estos sistemas son isomorfos a estructuras algebraicas. Por ejemplo, la lógica proposicional basada en un conjunto finito de variables lógicas es isomorfa a la teoría de conjuntos finitos. Además, ambos sistemas son isomorfos

a un álgebra booleana finita. [7]

En el caso del retículo acotado, éste es isomorfo a una lógica que obedece a las mismas operaciones del álgebra del retículo. Es decir, el retículo acotado define un álgebra isomorfa a la lógica difusa [6]. Este isomorfismo garantiza que los axiomas en un sistema sean tautologías en el otro sistema. Lo anterior quiere decir que podemos realizar operaciones lógicas como operaciones algebraicas.

El retículo se puede denotar por $\mathbf{X} = \langle X, F, T, \vee, \wedge \rangle$ donde:

X Universo

T Supremo

F Infimo

$\wedge$ Conjunción

$\vee$ Disjunción

Ahora veamos algunos elementos de la teoría de conjuntos difusos.

2.1.2. Lógica difusa vista desde la teoría de conjuntos

Como señalamos anteriormente existe un isomorfismo entre la lógica difusa y el álgebra de un retículo acotado. También existe un isomorfismo entre la lógica difusa y la teoría de conjuntos difusos lo que implica que las operaciones lógicas tienen sus correspondientes operaciones en la teoría de conjuntos difusos.

Conjuntos Difusos

Un conjunto A es una colección de objetos de un universo X , donde se puede especificar los objetos que pertenecen o no a la colección. Los objetos x que pertenecen a la colección son llamados elementos de A , $x \in A$. Un conjunto está identificado por su función característica

$$\chi_A(x) \mapsto \{0, 1\}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Llamamos conjunto nulo, $\emptyset$, al que no tiene elementos.

Los conjuntos difusos tienen como rango el intervalo $[0,1]$ de su función característica la cual es llamada función de pertenencia. La definición de conjunto difuso permite modelar expresiones lingüísticas como pequeño, muy grande, etc.

Definición 2.1.4 Sea X el conjunto universal. Un conjunto difuso o borroso A en X está identificado por su función de pertenencia, $\mu_A(x) : X \mapsto [0, 1]$, que asocia a cada punto en X un número real en el intervalo $[0,1]$. El Valor $A(x) = \mu_A(x)$ es llamado grado de pertenencia de x a A . [11]

Los conjuntos difusos son generalizaciones de los conjuntos clásicos.

Operaciones sobre conjuntos borrosos

Sea X el universo de discurso y sean A y B dos subconjuntos borrosos con funciones de pertenencia $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$, respectivamente. Pueden definirse las siguientes operaciones:

Unión: $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Intersección: $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Complemento: $\mu_{\bar{A}}(x) = (1 - \mu_A(x))$

Estas maneras de definir la intersección y la unión constituyen una generalización de los conjuntos clásicos, aunque éstas no son las únicas generalizaciones. Existe una amplia clase de funciones conocidas como t-normas y t-conormas para la intersección y la unión, respectivamente. Dado que la intersección y la unión no son operaciones únicas, contrario a los conjuntos clásicos, diferentes funciones pueden ser apropiadas para representar estas operaciones en diferentes contextos.

Definición 2.1.5 Una *t-norma* es una función $*$: $[0, 1] \times [0, 1] \mapsto [0, 1]$ que satisface los siguientes axiomas:

Límite condicional para la intersección $*(a, 1) = a$

Monotonía para la intersección $*(a, b) \leq *(c, d)$ si $a \leq c$ y $b \leq d$

Conmutatividad para intersección $*(a, b) = *(b, a)$

Asociatividad para la intersección $*(a, *(b, c)) = (*(a, b), c)$

Algunos ejemplos de las más conocidas t-normas que sirven como una interpretación generalizada de la intersección son:

1. Gödel $*(x, y) = \min\{x, y\}$
2. Producto $*(x, y) = x \cdot y$
3. Lukasiewicz $*(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}$

Definición 2.1.6 Una *t-conorma* es una función $\sqcup$: $[0, 1] \times [0, 1] \mapsto [0, 1]$ que satisface los siguientes axiomas:

Límite condicional para la unión $\sqcup(a, 0) = a$

Monotonía para la unión $\sqcup(a, b) \leq \sqcup(c, d)$ si $a \leq c$ y $b \leq d$

Conmutatividad para unión $\sqcup(a, b) = \sqcup(b, a)$

Asociatividad para la unión $\sqcup(a, \sqcup(b, c)) = \sqcup(\sqcup(a, b), c)$

Ejemplos de las t-conormas más conocidas que sirven como una interpretación generalizada de la unión son:

1. Gödel $\sqcup(x, y) = \max\{x, y\}$
2. Producto $\sqcup(x, y) = (x + y - x \cdot y)$
3. Lukasiewicz $\sqcup(x, y) = \min\{1, x + y\}$

Definición 2.1.7 Una función $\Rightarrow$: $[0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ es el residuo de una t-norma $*$ si cumple la siguiente condición:

$$*(x, z) \leq y \text{ si y solo si } z \leq (\Rightarrow (x, y)) \text{ para todo } x, y, z \in [0, 1]$$

El residuo de la t-norma de Gödel es:

$$(x \Rightarrow y) = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$$

El residuo de la t-norma Producto es:

$$(x \Rightarrow y) = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } x \leq y \\ y/x & \text{si } x > y \end{cases}$$

El residuo de la t-norma de Lukasiewicz es:

$$(x \Rightarrow y) = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } x \leq y \\ 1 - x + y & \text{si } x > y \end{cases}$$

La t-norma, t-conorma y el residuo fueron definidas como operaciones entre conjuntos difusos. En lógica difusa estas operaciones son precisamente la conjunción, la disyunción e implicación y a partir de ellas podemos definir las demás conectivas lógicas.

Capítulo 3

Teoría de la Evidencia

3.1. Introducción

La teoría de la evidencia es una de las teorías más generales para la representación de la incertidumbre y está profundamente influenciada por las probabilidades. La teoría de la evidencia comprende creencia, plausibilidad, necesidad, posibilidad y probabilidad y tiene como punto central la credibilidad asignada a que un evento pueda ocurrir de acuerdo a la experiencia y el punto de vista del individuo, contrario a la probabilidad clásica que supone valores de probabilidad a cualquier evento independientemente del observador. [9]

Como habíamos señalado previamente, la incertidumbre, en términos generales, puede derivar de una información incompleta e imprecisa; las características propias de la realidad y la deficiencia de los modelos. La teoría de la evidencia describe la incertidumbre en la evidencia (información incompleta e imprecisa).

La teoría de la evidencia está basada en dos medidas difusas: medidas de creencia y medidas de plausibilidad o verosimilitud.

Definición 3.1.1 Sea X el conjunto universal y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X (una σ – algebra), una medida difusa en un espacio medible $\langle X, \mathcal{B} \rangle$ es una función $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, 1]$ que cumple con las siguientes condiciones:

1. $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(X) = 1$;
2. $\forall A, B, \in \mathcal{B}$ si $A \subseteq B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$;
3. Para cualquier sucesión creciente o decreciente de sucesos en $\mathcal{B}$, si:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}, \text{ entonces } \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Definición 3.1.2 Sea X un conjunto universal (finito) y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto potencia, una medida de creencia es una función $Bel : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ que cumple con las siguientes condiciones:

1. $Bel(\emptyset) = 0$;
2. $Bel(X) = 1$;
3. $Bel(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geq \sum_j Bel(A_j) - \sum_{j < k} Bel(A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n+1} Bel(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$

La condición iii) es llamada superaditividad.

Para $n=2$ en la ecuación anterior supongamos que $A_1 = A$ y $A_2 = \bar{A}$, entonces podemos derivar la propiedad fundamental de las medidas de creencia:

$$BelA + Bel(\bar{A}) \leq 1 \tag{3.1}$$

$\forall A \in \mathcal{P}(X)$, $Bel(A)$ es interpretada como el grado de creencia (basada en una evidencia disponible) que un elemento dado de X pertenece al conjunto A .

Las medidas de creencia tienen como inverso las medidas de plausibilidad, definida por:

$$Pl(A) = 1 - Bel(\bar{A}) \text{ para todo } A \in \mathcal{P}(X)$$

Definición 3.1.3 Una medida de plausibilidad es una función $Pl : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ que cumple con las siguientes condiciones:

1. $Pl(\emptyset) = 0$;

$$2. Pl(X) = 1;$$

$$3. Pl(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \leq \sum_j Pl(A_j) - \sum_{j < k} Pl(A_j \cup A_k) \\ + \dots + (-1)^{n+1} Pl(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

La propiedad iii) es llamada subaditiva.

Para $n=2$ en la ecuación anterior supongamos que $A_1 = A$ y $A_2 = \bar{A}$, entonces podemos derivar la propiedad fundamental de las medidas de plausibilidad:

$$PlA + Pl(\bar{A}) \geq 1 \quad (3.2)$$

Las medidas de creencia y de plausabilidad pueden ser caracterizadas por una función $m : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, 1]$, tal que $m(\emptyset) = 0$ y

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} m(A) = 1 \quad (3.3)$$

La función m es llamada función de asignación básica de probabilidades. Para cada conjunto $A \in \mathcal{P}(X)$, el valor $m(A)$ expresa la proporción a la cual toda evidencia relevante y disponible soporta la hipótesis de que un particular elemento de X pertenece al conjunto A .

Aunque la ecuación (3.3) tiene semejanza con las funciones de distribución de probabilidad, hay una diferencia fundamental entre ellas. Las funciones de distribución de probabilidad están definidas en X , mientras que las funciones de asignación básica de probabilidades son definidas en el conjunto potencia de X , $\mathcal{P}(X)$.

Las funciones de distribución de probabilidad no son medidas difusas; sin embargo, dada una asignación m , una medida de creencia y una medida de plausibilidad son determinadas para cualquier conjunto $A \in \mathcal{P}(X)$ por las fórmulas:

$$Bel(A) = \sum_{B|B \subseteq A} m(B), \quad (3.4)$$

$$Pl(A) = \sum_{B|A \cap B \neq \emptyset} m(B) \quad (3.5)$$

El procedimiento inverso también es posible. Dada una medida de creencia Bel , la correspondiente asignación básica de probabilidad m es determinada para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ por la fórmula:

$$m(A) = \sum_{B|B \subseteq A} (-1)^{|A-B|} Bel(B) \quad (3.6)$$

La relación entre $m(A)$ y $Bel(A)$ expresada por (3.4) quiere decir que mientras $m(A)$ caracteriza el grado de evidencia o creencia que el elemento en cuestión pertenece al conjunto A (solo a A), $Bel(A)$ representa el total de evidencia o creencia que el elemento pertenece a A o también a varios subconjuntos especiales de A . La medida de plausibilidad $Pl(A)$ en (3.5) tiene un significado diferente: representa no sólo la evidencia o creencia total que el elemento en cuestión pertenece al conjunto A o a cualquier subconjunto de A , sino también la evidencia adicional asociada con conjuntos que interceptan con A . Por tanto,

$$Pl(A) \geq Bel(A) \quad (3.7)$$

para todo $A \in \mathcal{P}(X)$

3.2. Teoría de las Posibilidades

La teoría de las posibilidades es una rama de las teorías de la evidencia dedicada al manejo de información incompleta. En este sentido, complementa la teoría de las probabilidades la cual también es una rama de la teoría de la evidencia. Aunque ambas teorías tienen una base común son totalmente distintas.

La teoría de las posibilidades puede ser formulada desde la teoría de la evidencia o en términos de conjuntos difusos. En este último caso necesitamos una función de distribución de posibilidades que es un conjunto difuso. En nuestro caso desarrollaremos la teoría de las posibilidades desde la perspectiva de la teoría de la evidencia.

Definición 3.2.1 Sea X un conjunto universal, $\mathcal{P}(X)$ el conjunto potencia de X y m la función de asignación básica de probabilidades. Para cada conjunto $A \in \mathcal{P}(X)$ para la cual $m(A) > 0$

es llamado un elemento focal de m .

Los elementos focales como su nombre lo indica son subconjuntos de X en la cual se concentra la evidencia disponible. El par $\langle \mathcal{F}, m \rangle$, donde $\mathcal{F}$ y m denotan un conjunto de elementos focales y la función de asignación básica, respectivamente es llamado cuerpo de evidencia. La teoría de las posibilidades requiere que los elementos focales estén anidados.

La teoría de las posibilidades tiene las medidas de necesidad y posibilidad como contraparte de las medidas de creencia y plausibilidad, respectivamente. Denotaremos las medidas de necesidad por Nec y las medidas de posibilidad por Pos .

Definición 3.2.2 Supongamos que Nec denota una medida difusa en un espacio medible $\langle X, \mathcal{B} \rangle$. Entonces Nec es llamada una medida de necesidad si y solo si:

$$Nec\left(\bigcap_{k \in K} A_k\right) = \inf_{k \in K} (Nec(A_k)) \quad (3.8)$$

para cualquier familia $\{A_k \mid k \in K\}$ en $\mathcal{B}$ tal que $\bigcap_{k \in K} A_k \in \mathcal{B}$, donde K es un conjunto arbitrario indexado.

Definición 3.2.3 Supongamos que Pos denota una medida difusa en un espacio medible $\langle X, \mathcal{B} \rangle$. Entonces Pos es llamada una medida de posibilidad si y solo si:

$$Pos\left(\bigcup_{k \in K} A_k\right) = \sup_{k \in K} (Pos(A_k)) \quad (3.9)$$

para cualquier familia $\{A_k \mid k \in K\}$ en $\mathcal{B}$ tal que $\bigcup_{k \in K} A_k \in \mathcal{B}$, donde K es un conjunto arbitrario indexado.

3.3. Teoría de las posibilidades versus teoría de las probabilidades

La teoría de la evidencia nos ofrece un marco general bastante apropiado para comparar la teoría de las probabilidades y la teoría de las posibilidades debido a que éstas son ramas especiales de

la teoría de la evidencia.

La axiomatización de la teoría de las probabilidades provee una formalización consistente a las diferentes conceptualizaciones de las probabilidades, permitiendo superar algunas de sus limitaciones como por ejemplo la definición de la probabilidad en conjuntos infinitos.

Uno de los axiomas en que se fundamenta la probabilidad es el de aditividad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (3.10)$$

Para todo conjunto $A, B \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A \cap B = \emptyset$

Este axioma es más fuerte que el axioma de superaditividad de las medidas de creencia. Esto implica que las medidas de probabilidad son un caso especial de las medidas de creencia lo que puede precisarse por el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1 *Una medida de creencia Bel en un conjunto de potencia finito $\mathcal{P}(X)$ es una medida de probabilidad si y solo si la función de asignación básica de probabilidades asociada m es dada por $m(\{x\}) = Bel(\{x\})$ y $m(A) = 0$ para cualquier subconjunto de X que no sea unitario.*

De acuerdo al teorema anterior, las medidas de probabilidad en conjuntos finitos son representados por la función $p : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $p(x) = m(\{x\})$ llamada función de distribución de probabilidad.

Cuando la función de asignación básica de probabilidades se concentra en conjuntos unitarios, como es el caso de la teoría de las probabilidades (teorema anterior), las medidas de creencia y plausibilidad de las ecuaciones (3.4) y (3.5) son iguales. Por tanto,

$$Bel(A) = Pl(A) = \sum_{x \in A} m(\{x\})$$

Para todo $A \in \mathcal{P}(X)$

Utilizando la noción de función de distribución de probabilidad, esto puede escribirse como:

$$Bel(A) = Pl(A) = \sum_{x \in A} p(x)$$

Esto significa que las medidas de creencia y plausibilidad son iguales bajo el axioma de aditividad de las medidas de probabilidad.

De acuerdo a las propiedades matemáticas que hemos visto, las medidas de posibilidad, necesidad y probabilidad son independientes unas de otras, excepto cuando el elemento focal es unitario. Esta es una diferencia importante: el cuerpo de evidencia de la teoría de la probabilidad son conjuntos unitarios, mientras que en la teoría de la posibilidad son conjuntos anidados.

Las diferencias entre ambas teorías hacen que una modele más adecuadamente ciertos tipos de incertidumbre que la otra. La probabilidad es apropiada para formalizar incertidumbre en situaciones donde la clase de frecuencias es conocida o donde la evidencia está basada en resultados de una serie suficientemente grande de experimentos aleatorios independientes. Por otro lado, la teoría de las posibilidades es apropiada para formalizar información incompleta expresada en términos de proposiciones difusas.

Hay muchas interpretaciones de la teoría de las posibilidades. Algunas interpretaciones establecen una relación entre la teoría de las posibilidades y la teoría de las probabilidades, mientras que otras no establecen ninguna relación. Independientemente de esto, está bien establecido que la teoría de las posibilidades establece un vínculo entre la teoría de las probabilidades y los conjuntos difusos [7].

Dos importantes interpretaciones de la teoría de las posibilidades es considerar la posibilidad como similaridad y como comparación [4]. En el primer caso la posibilidad refleja el grado de similaridad entre x y un ideal x_i , para los que el grado de posibilidad es 1. En otras palabras, la posibilidad es la distancia entre x y x_i definida en términos de atributos relevantes de los elementos. La segunda interpretación está basada en un orden, $\leq_{pos}$, definido en $\mathcal{P}(X)$. $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \leq_{pos} B$ significa que B es al menos tal posible como A .

Cuando la información de algún fenómeno se expresa en medidas de probabilidad y de posibilidad, entre ambas medidas debe existir cierta consistencia. Un evento que es probable en cierto grado al menos es posible en el mismo grado. En términos formales:

$$P(A) \leq Pos(A) \quad (3.11)$$

Para todo $A \in \mathcal{P}(X)$

Una condición más fuerte debería requerir que un evento con probabilidad mayor que cero es siempre posible.

$$P(A) > 0 \implies Pos(A) = 1 \quad (3.12)$$

Para todo $A \in \mathcal{P}(X)$

Conclusión

La teoría de las probabilidades tiene un sin número de aplicaciones en la ciencia y en el plano teórico está en el corazón de la física como expresó Edgeworth. La probabilidad desde la física destronó el determinismo de la mecánica clásica y ahora las predicciones físicas son hechas en términos de probabilidades.

La probabilidad explica bastante bien los sistemas dinámicos aislados como un sistema mecánico hamiltoniano, pues estos sistemas tienen propiedades ergódicas. Sin embargo, para sistemas dinámicos complejos que reaccionan a variaciones de su entorno la probabilidad no parece brindar una explicación plausible, debido que éstos tienen propiedades no ergódicas.

También la teoría de las probabilidades ha sido criticada desde su base, la lógica aristotélica, pues ésta es una lógica bivalente que está en conflicto con la realidad donde todo es cuestión de grado.

La lógica difusa ha permitido el desarrollo de otros tipos de medidas distintas a la probabilidad para representar la incertidumbre. Estas medidas son las medidas de creencia y las medidas de plausibilidad que corresponden a la teoría de la evidencia. La teoría de la evidencia es un marco más general cuyos casos particulares son la teoría de las probabilidades y la teoría de las posibilidades.

La probabilidad es apropiada para modelar la incertidumbre en situaciones donde la clase de frecuencias es conocida o donde la evidencia está basada en resultados de una serie suficientemente grande de experimentos aleatorios independientes. La teoría de las posibilidades, en cambio, es apropiada para modelar información incompleta expresada en

términos de proposiciones difusas.

Bibliografía

- [1] Bunge, Mario (2009). *Tratado de Filosofía. Volumen II. Semántica II. Interpretación y Verdad*. Editorial Gedisa. España.
- [2] Boudot, Maurice (1979). *Lógica Inductiva y Probabilidad*. Editorial Paraninfo. Madrid. pp. 121-122.
- [3] Carcamo, Ulises (1996). *El Origen Fenomenológico de la Teoría Ergódica*. Revista Universidad Eafit Vol. 32, No. 103, 15-27.
- [4] Dubois, Didier; Prade, Henri (1993). *Fuzzy Sets and Probability: Misunderstandings, Bridges and Gaps*. Institut de Recherche en Informatique de Toulouse.
- [5] Edgeworth, Francis (1913). *On the Use of the Theory of Probabilities in Statistics Relating to Society*, Journal of the Royal Statistical Society, vol. 76 No. 2, 165-193. Traducido por Julio A. del Pino en EMPIRIA, Revista de Metodología de Ciencias Sociales, No. 14, Julio-Diciembre, 2007, 165-192.
- [6] Gehrke, Mai [et al.] (2000). *Some Algebraic Aspect of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. New Mexico State University.
- [7] Klir, George (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*. Prentice-Hall, Estados Unidos.
- [8] Novák, Vilém. *Which Logic is the Real Fuzzy Logic*. University of Ostrava. Institute for Research and Applications of Fuzzy Modelling. Research report No. 73.
- [9] Reyes, Jose Fernando (2005). *Toma de Decisiones Mediante Técnica de Razonamiento Incierto*. Ingenierías, Julio-Septiembre, Vol. VIII, No. 28.
- [10] Stanford Encyclopedia of Philosophy. (2011, Diciembre 19). *Interpretations of Probability*. Retrieved October 16, 2013, from Stanford University. Center for the Study of Language and Information: <http://plato.stanford.edu/entries/probability-interpret/>
- [11] Zadeh, L.A. (1965). *Fuzzy Sets. Information and Control*. Págs. 338-353 (1965).
- [12] Zadeh, L.A. (2002). *Probability Theory and Fuzzy Logic*.